EY　水野

複素数の歴史

Ver1.03　2012.3.10

1.　まえがき

電気工学の学習では直流電圧、直流電流などの学習から始まり、途中、交流へと進む。しかし、すでに学習したことのある多くの人が、「交流になると急に難しくなる。位相だとか、周波数だとか、複素数などが出て来る」と言い、いままでの数学では余り学習しなかった「複素数」が大きな障害になっている様である。

このテキストでは、前半で何故複素数が必要になったか、数学の歩みを概観した後、複素数の数学的、物理的な意味、演算方法を学習する。

なお、数学と物理の関係は切っても切れない関係があり、様々な文献が出版されているが、興味のある学生はまず参考文献(2)を読むことを薦める。ここから様々な本に読み進んで貰えれば幸いである。

2.　数の歴史

（１）自然数から有理数まで [1]

皆さんが最初に「数」と言う概念に出会ったのは、おやつの分配でお母さんから、「皆、２つずつ取りなさい」と言われ、みかんや飴玉を２個ずつ取ったあたりが初めてだと思います。また、同様に時間の概念として、お風呂に入り、「１０まで数えたら」とか「１００まで数えたら上がっていいよ」と言われたのが始まりではないでしょうか。

このように、「ひとつ、ふたつ、みっつ、・・・」と数えたものが自然数で、私たち自身が経験する最初の数でもあり、古くは人間の歴史のなかで人間が出会った最初の数でもあります。

余談ですが、私たちは子供の頃、指を折って数を数えました。親指からの人もいれば、握って数える人、開いて行って数える人、様々です。それから、動物はいくつまで数を理解できるか、古代の人々あるいはいまでも砂漠や密林で生活している人は幾つまで数を認識しているか、それぞれに異なっています。興味のある人は参考文献(1)をお勧めします。読んでみてください。

このように、１、２、３･･･　と１から始まる数に、「０」が加わりました。このゼロはインド人の発見と言われていますが、そこに存在しない事を「０」で表すと言う発想は驚きに値します。最初の例でも、みかんが１０個あり、一つづつ取っていったら、残りがゼロになった。これは数学的思考では当たり前ですが、子供の頃には、「あと幾つ残っている」と聞けば、「もう無いよ」と言うのが答えです。これが「０」だと言う人（子供）はまず居ません。この、「０」を加え、０、１，２，３，４･･･を自然数と呼びます。

この後、負の数が考案され、「整数」が、さらに、整数の比（m/n）で表される「分数」または「有理数」が発見（考案）されます。ここまでは皆さんも十分に理解し、算数や数学好きの子供にもちゃんと教えることができると思います。「なんで０を掛けるとどんな数でも０になるの」とかです。

（２）少数

ここまでの議論で全ての事象は有利数で表すことが出来ました。そしてこれはいまから４千年前くらいの人たちが考えた事ばかりです。つまり数としては、

$$1,\ 2,\ 3\cdots,\quad -3,\ \frac{6}{7},\ \frac{2}{3}$$

と言うようなもので、小学校の算数で習う範囲です。ここで、私たちが何時も計算で悩まされるある表現方法がまだ登場していないことに気が付きませんか。そう、「少数」という表現方法がまだ紹介されていません。例えば、14.72 の様に書かれた数です。ではこの少数はいつごろ登場したのでしょうか。今日我々が知る小数と言う体系は、小数点も含め、１６世紀末にフランスで開発されました。何とつい５００年程前の出来事です。

この少数の発明で有理数は少数で表すことが出来るようになりました。さらに驚くべき性質として、(n/m)型の有理数は、循環小数で表現でき、その循環する数は必ず m 桁以下となっています。本当でしょうか。各自、試してみてください。

（３）無理数

ここまでで、自然数、整数、有理数、までお話しました。これらの数学は主に測量、会計（税金）などに使われました。したがって、当然このような問題を扱う範囲で矛盾は生じませんでした。

それではなぜ、無理数が必要になったのでしょうか。あるいは、無理数は何が「無理」だったのでしょうか。

紀元前 500 年頃の話とされていますが、次のような問題がありました。ある神殿の設計を行っているときでした。「ここに正方形の場所がある。この部屋の面積をちょうど半分にしたいのだが、一遍の長さが表現出来ない。どうしたら良いか」詳しくは参考文献(2)に載っているのでそちらを読んで欲しいのですが、皆さんなら直ぐに答えが分かると思いますが、これは有理数で表すことは「無理」です。古代ギリシャ人はこのことにとても頭を悩ましました。さらに、当時はまだ「ないしょ」でしたが、無理数は有理数よりも沢山存在しているのです。嘘だと思う人は近くの数学の先生に聞いてみましょう。もちろん自分で考えてからです。

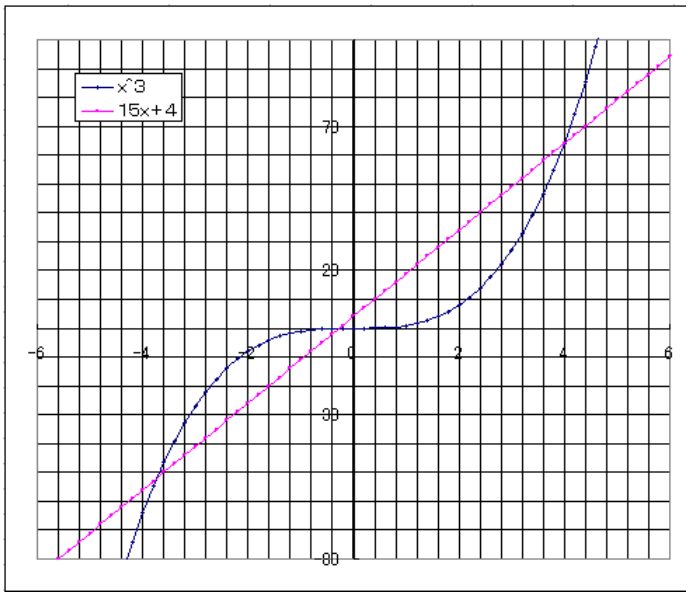

図１　$y=x^3, y=15x+4$ のグラフ

（４）複素数 [2]

やっと複素数にたどり着きました。「(2)少数」の表現方法を除くと、古代ギリシャ時代の話でした。「少数」の話を入れてやっと１６世紀、まだ 500 年前のお話です。有理数と無理数を併せて実数と呼ぶことは既に皆さんご存知のことと思います。そして、無理数は何が「無理」だったのか、その必要性がわかってもらえたと思います（勉強したとして）。

では、複素数は何故必要だったのでしょうか。フランスのルネ・デカルト（1596-1650：54 没年齢）は、この数は「空想上のものだ」と言い張ったし、それから半世紀ほど経ってもドイツの数学者ライプニッツ（1646-1716：70）は、「神の精神の見事な飛翔」であると考え、これまでの「数」とは別のものだと考えていました。

無理数が出てくる有名な問題を前に紹介しましたが、複素数でも同様に、以下の問題がありました。

つまり、「$x^3 = 15x + 4$。この答えは？」x には３つの答えがあります。図で解くなら、$y = x^3, y = 15x + 4$ の二つの線の交点を求めれば良いわけで、Excel を使ってグラフを書けば、x ＝４と-0.268、-3.732 あたりに答えのあることが分かります（前ページ図１参照）。

この問題は代数学者のガルダーノにとって大きな問題でした。実数の答えが得られるにも係わらず代数的に扱おうとすると虚数（$i = \sqrt{-1}$）を使わないと答えが出せない、と言う結果になったからです。この虚数の扱いに必要な数学的規則はさらに数世代必要でしたが、そのなかで大きな貢献をしたのはライプニッツ（前出）とオイラー（1705-1783：78）です。しかし、そのオイラーでさえ、「負の数の平方根が数の仲間として認められるべきではないは明らかである・・・・・・それらは、われわれの空想の中だけで存在するのである」と言っています。この不思議な数、複素数を概念化し、祖先の数たちとの関係をつけるうえで最初のハードルを乗り越えたのは独学で数学を学んだノルウェーの測量技師、ベッセル（1745-1818：67）でした。1798 年にデンマークアカデミーの会報に発表しました。

3.　複素数の表示方法と演算方法

（１）複素平面表示

ベッセルの提案は次のようなものでした。「２＋ｊ１１は東２番地、北１１番地、－３－ｊ４は西３番地、南４番地」、つまり平面の座標に対応させると言うことでした。このような考え方で表示される複素数は「複素平面」上に表記されると言います。さらに、話が横道にそれますが、平面上のベクトル（２次元のベクトル）の加算、減算にこの複素平面を使います。

図２は複素平面です。ｘｙ平面のｘ軸に相当するものが「実軸」、ｙ軸に相当するものが「虚軸」です。電気工学などでは、実軸を R(ｒ)、虚軸を X(x)または ｊX(jx)と書く場合もあります。これはインピーダンス Z が Z=R+jX の様に表現され、且つ、R：Resistance(抵抗)、X：（リアクタンス）だからです。数学の場合、Re 軸（Real）、Im 軸　（Imaginary）と呼ぶ場合もあります。

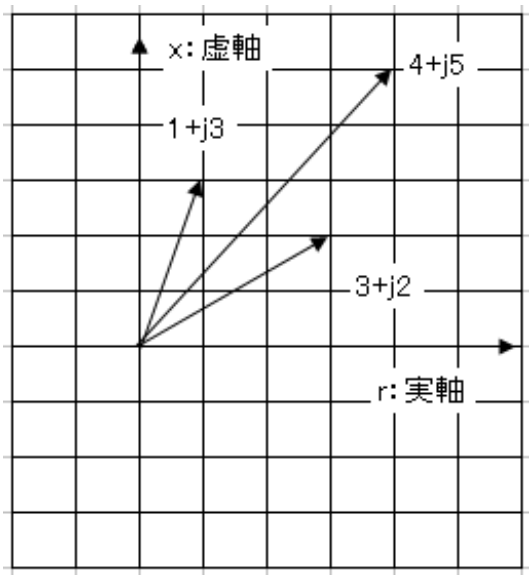

図２　複素平面上の複素数

いま、図２には３つの複素数が示されています。それぞれ、1+j3、4+j5、3+j2 です。これらは前にも述べましたが、加算減算の関係を示しています。つまり、

$$(1+j3)+(3+j2)=(1+3)+j(3+2)=4+j5$$
$$(4+j5)-(3+j2)=(4-3)+j(5-2)=1+j3$$

となり、それぞれ実数部分、虚数部分のみで加減算をすれば良いことがわかります。さらに、$4, j$ はそれぞれ、$4+j0,\ 0+j1$ であることが分かります。それでは乗算はどのようにしたら良いでしょうか。それは（a+b）*(c+d)の掛け算を思い出してもらえれば直ぐ分かります。

$$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd \tag{1}$$

したがって、

$$\begin{aligned}(a+jb)\cdot(c+jd)&=ac+a\cdot jd+jb\cdot c+jb\cdot jd\\&=ac+jad+jbc+j^2bd\\&=ac+j(ad+bc)+(-1)bd\\&=(ac-bd)+j(ad+bc)\end{aligned} \tag{2}$$

基本的には(1)式となんら変わりが無い、つまり虚数（ｊ）の値のみ正確に理解していれば、実数の計算となんら変わらないことがわかると思います。次に除算を考えます。これには、見慣れた公式、

$$(x+y)(x-y)=x^2+y^2 \tag{3}$$

を思い出してください。乗算と同様、$(a+jb),(c+jd)$ を用います。

$$(a+jb)\div(c+jd)=\frac{a+jb}{c+jd} \tag{4}$$

この分母に jd があるのが厄介です。これを(3)式を参考に、$j^2=-1$ であることを利用して実数で表して見ましょう。

$$\begin{aligned}(a+jb)\div(c+jd)&=\frac{a+jb}{c+jd}=\frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)}=\frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2-(jd)^2}\\&=\frac{\{ac-(jb)(jd)\}+j(bc-ad)}{c^2+d^2}\\&=\frac{\{(ac+bd)+j(bc-ad)\}}{c^2+d^2}\ \text{or}\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+j\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\end{aligned} \tag{5}$$

このように、$r+j\ x$ の形で表現することが出来ました。ちなみに、(2)式の最終行、つまり答えを *(a+jb)* で割ると、*(c+jd)*となることを確認して見て下さい。結構大変です。

以上が複素平面で表示される $a+jb$ 型表記の複素数に対する四則演算の方法です。

（２）極表示

複素数については、$a+jb$ 型表記が基本ですが、その後の数学上の歴史の発展とともに様々な形式について開発されて来ました。そして乗算、除算には複素数を大きさの絶対値と x 軸との角度（位相）で表す方法が便利であることが分かりました。以下に、$Z_1=1+j1,\ Z_2=2+j1$ の二つの複素数の積について考えます。

初めに、(2)式と同じ方法で計算すると、$Z_3 = 1 + j3$ が直ぐ求められますが、この三つの複素数を絶対値と位相で表してみます。

$$\begin{cases} |1+j1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \angle(1+j1) = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{1}\right) = \dfrac{\pi}{4} = 45° \end{cases}$$

$$\begin{cases} |1+j2| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5} \\ \angle(1+j2) = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 26.57° \end{cases} \qquad (6)$$

$$\begin{cases} |1+j3| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \\ \angle(1+j3) = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) = 71.57° \end{cases}$$

この様に求めると、積 Z_3 の絶対値と位相に次の関係があることが分かります。途中の説明は省略しますが、除算についても併せて書きます。

$$\begin{cases} Z_3 = Z_1 \cdot Z_2 \\ |Z_3| = |Z_1| \cdot |Z_2|, \quad \angle Z_3 = \angle Z_1 + \angle Z_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_3 / Z_1 = Z_2 \\ |Z_2| = |Z_3| / |Z_1|, \quad \angle Z_2 = \angle Z_3 - \angle Z_1 \end{cases} \qquad (7)$$

この様に、複素数の絶対値と位相を用いて表現する方法を極表示と言います。極表示は更に三角関数を用いて(8)式の様に表す事が出来ます。

$$Z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$\begin{cases} |Z| = r \\ \angle Z = \tan^{-1}\dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \theta \end{cases} \qquad (8)$$

（３）オイラーの公式

複素数は物理学に用いられ更に様々は発展を遂げます。物理学で初めて複素数が応用されたのは、振り子などの振動に関する方程式でした。この振動の問題で複素数が役に立つのは次に示す美しい数学的恒等式のおかげです[2]。

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad (9)$$

この式は指数関数と三角関数を結びつけるもので、フランス生まれでイギリスで教育を受けた、アブラーム・ド・モアブル（1667-1754 : 87）の仕事から生まれました。が、一般にはオイラー（1705-1783 : 78）が発見したことにされています。

(8)(9)式から一般に複素数 Z は次式のような指数関数で表されることが分かります。

$$Z = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta} \tag{10}$$

勿論、この複素数の絶対値は r 、位相は θ です。

4.　複素数の演算

（１）複素平面（実部＋虚部）型

３章(1)で述べた複素平面に表されるような、実部＋虚部型が複素数の基本形式です。(1)～(5)式に表される基本的演算を自分で行える様、多くの問題を経験すること。これが出来れば、次節の表示方法もその意味が理解出来ると思われます。

（２）極表示、指数関数表示

極表示は電気工学では「フェーザ」と言われて教科書などにも載っています。フェーザは日本語の「羽根」ではなく、Phase（位相)から来ていることは、(6)(7)式の演算方法を見れば、位相の加減算が複素数の乗除算になっていることからも理解できます。

さらに指数関数表示など、数学の歴史のなかで改良された様々な表示方法がありますが、今回の電気工学では前節の「複素平面（実部＋虚部）型」で学習することにします。

5.　まとめ

以上、数の歴史から始めて複素数の演算方法について説明しました。数学はこの複素数の登場で第一幕を閉じるが、もちろん更に様々な発展があったことは言うまでもありません。今回は電気工学の演習に必要な複素数の扱いについて述べましたが、このテキストでさらに数学に興味を持った学生は、次の参考文献を読むことを勧めます。

6.　参考文献

(1) 矢野健太郎、「数学物語」、角川文庫、平成 16 年 5 月　第 62 版、ISBN4-04-311801-5

(2) マルコム・E・ラインズ著、青木　薫　訳、「物理と数学の不思議な関係」早川文庫、2004.12　発行 ISBN 4-15-050295-1

(3) ロマノフスキー著、久保忠雄訳、「応用数学の基礎」、共立出版

(4) E・T・ベル著、「数学をつくったひとびと　I～III」ハヤカワ文庫 NF