電気回路および演習(春学期) 電気回路および実験(通年)

これだけ覚えれば電気回路は卒業

2007.4.19 水野 2008/4/2 Ver1.01

1. 考え方

1.1 電流の複素表示

この資料を見たのが、交流回路を習っていない、早い時期なら「交流信号は三角関数で表される」と信じて下さい。そして、一般には、電流・電圧は、以下の様に書き表されます。

$$i(t) = I\sin(\omega t + \theta) \tag{1}$$

ここで、I は電流の大きさを表す値(振幅の絶対値)、 ω は角周波数($\omega=2\pi f$ (f: 周波数))、 θ は初期位相、です。

この資料を見たのが、交流回路を習った後なら、(1)式は既に学習していると思います。

この(1)式ですが、これを扱うには三角関数の微分、積分、掛け算、割り算を熟知していなければならず、煩雑であること、また、三角関数はオイラーの公式により指数関数で表すことが出来る、さらに指数関数は微分積分が極めて簡単であるため、電気回路では(1)式を指数関数で表す方法を用いることが多い。

$$i(t) = Ie^{j(\omega t + \theta)} = I\cos(\omega t + \theta) + iI\sin(\omega t + \theta)$$
(2)

(1)(2)式ともに、『振幅は I、角周波数 ω 、初期位相 θ 』の量を表していることが分かります。

ここまでで、(1)(2)式が電流を表す(数)式であること、また、扱い易さから(2)を使うと便利であること、が分かりました。

そこで、これ以降(2)式を使い、インダクタンス、キャパシタンスのインピーダンスについて考えて見ます。ちなみに「インピーダンス」とは複素量(大きさと位相を持つ量)で、複素量に対し、オームの法則が成り立つようにした値と考えて下さい。つまり、インピーダンスをZとすると、 $v(t)=Z\times i(t)$ ($V=R\times I$)と表現できるようなZを求める、と言うことになります。

それでは次節から抵抗、コイル (インダクタンス)、コンデンサ (キャパシタンス) のインピーダンスを求めて見ましょう。

1.2 抵抗

抵抗の両端に発生する電圧は、電流が複素表示になっても変わりません。つまり、

$$v_R(t) = R \cdot i(t) \tag{3}$$

で、直流の場合の表現と全く同じです。従って、敢えてインピーダンスの概念を持ち込む必要はありません。

その理由は講義で説明しますが、抵抗には位相成分が無いからです。

1.3 インダクタンス

インダクタンス (L) の両端に発生する電圧は、

$$V_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \tag{4}$$

で与えられます。この式に(2)式を代入し、(3)式のように表現された時、R に相当するものがインダクタンスの抵抗分、すなわちインピーダンスになります。

では、始めましょう。

$$v_{L}(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = L \cdot \frac{d}{dt} \left(Ie^{j(\omega t + \theta)} \right) = L \cdot I \cdot \frac{d}{dt} \left(e^{j(\omega t + \theta)} \right) = LI(j\omega)e^{j(\omega t + \theta)}$$

$$= L(j\omega) \cdot Ie^{j(\omega t + \theta)} = (j\omega)L \cdot i(t) = (j\omega L) \cdot i(t) = Z_{L} \cdot i(t)$$
(5)

(5)式を(3)式と見比べると、複素量に対するオームの法則、ではインダクタンスのインピーダンスは

$$Z_L = j\omega L \tag{6}$$

で表されることが分かると思います。

1.4 キャパシタンス

最後にキャパシタンスについて同様に計算して見ましょう。交流に対して、キャパシタンスの両端に発生する電圧は次のようになります。

$$v_C = \frac{1}{C} \int i(t)dt \tag{7}$$

インダクタンスの場合と同様、インピーダンスを求めて見ます。

$$v_{C} = \frac{1}{C} \int i(t)dt = \frac{1}{C} \int Ie^{j(\omega t + \theta)} dt = \frac{1}{C} I \int e^{j(\omega t + \theta)} dt = \frac{1}{C} I \frac{1}{j\omega} e^{j(\omega t + \theta)}$$

$$= \frac{1}{C} \frac{1}{j\omega} Ie^{j(\omega t + \theta)} = \frac{1}{j\omega C} Ie^{j(\omega t + \theta)} = \frac{1}{j\omega C} i(t) = Z_{C} \cdot i(t)$$
(8)

(8)式と(3)式を見比べると、複素量に対するオームの法則、ではキャパシタンスのインピーダンスは、

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \tag{9}$$

で表されることが分かると思います。

1.5 指数関数の微積分

付録として、指数関数の微積分について簡単に説明します。指数のべき数(肩の数)が 1次の変数である場合、例えば、at、の場合、微積分は以下で与えられます。

$$f(t) = e^{at}$$

$$\frac{d}{dt} f(t) = ae^{at} = af(t)$$

$$\int f(t)dt = \frac{1}{a}e^{at} = \frac{1}{a}f(t)$$
(10)

2. 「これだけ」の表

第1章で述べた事柄をまとめたものが、下の表です。これさえ理解していれば、電気回路の「定常状態」の解を得ることは極めて容易です。

2.2-7	2.5	インダクタン	************************************
ロニオ	ただけら	覚えれば電気	回路は卒業
		直流:動作	交流:インピーダンス
R	*	V=RI	e=Ri Z _R =R
L	-0000	「短絡」	e=jωL*i Z _L =jωL
С	+	「開放」「断線」	e= i*(1/ j ω C) Z _C = 1/ j ω C
			2

本資料は、第2部、「交流回路」の最初の授業でも学習するので、大切に保管して下さい。

以上